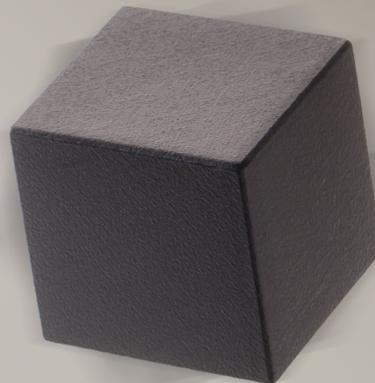


JUNGE

wissenschaft

JungforscherInnen publizieren
online | **peer reviewed** | original

Verlag:
Physikalisch-
Technische
Bundesanstalt



Physik

Stabiles Schweben

Untersuchung der waagerechten und vertikalen diamagnetischen Levitation

Magnete können in den Magnetfeldern anderer Magnete schweben. Die große Herausforderung besteht darin, den schwebenden Magneten so in der Balance zu halten, dass er nicht herunterfällt. Um dies zu erreichen, wird eine Graphitplatte dem Feld starker Dauermagnete ausgesetzt. Das ruft in der Platte ein spezielles Magnetfeld hervor, mit dessen Hilfe sich ein kleiner Magnet zum beständigen Schweben bringen lässt.



DER JUNGFORSCHER



© Jugend forscht

Carlos Steiner Navarro,

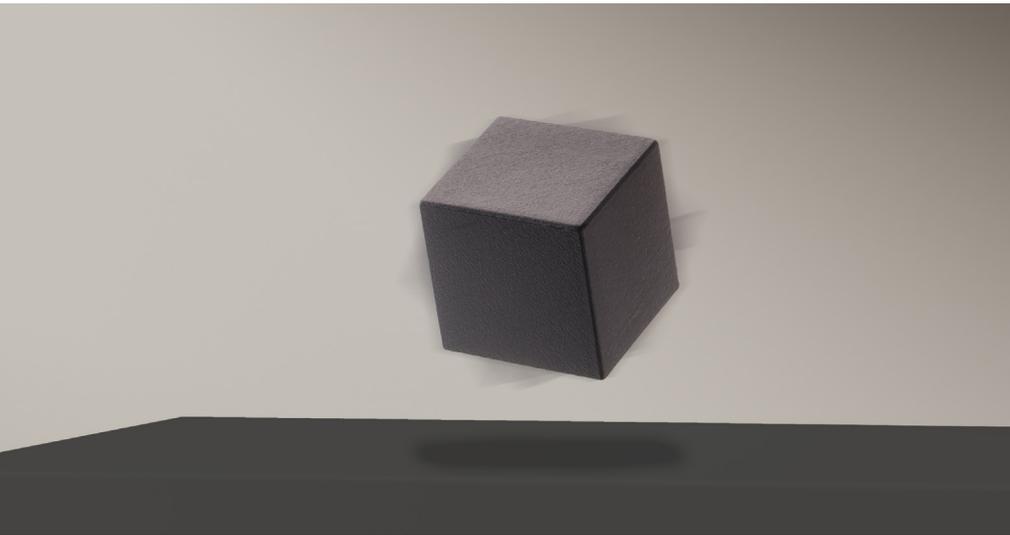
Deutsche Schule
Albrecht Dürer, Sevilla

Eingang der Arbeit:

25.6.2022

Arbeit angenommen:

25.8.2022



Stabiles Schweben

Untersuchung der waagerechten und vertikalen diamagnetischen Levitation

1. Einleitung

Diamagnetismus ist die Eigenschaft von Materialien, Widerstand gegen ein Magnetfeld zu leisten, auch wenn Diamagneten selbst spontan kein Magnetfeld erzeugen. In Präsenz eines externen Magnetfeldes induziert dieses im diamagnetischen Material einen Dipol, der dem Erregerfeld entgegensteht. Diese Eigenschaft hat zahlreiche Anwendungen. Zum Beispiel kann ein kleiner Magnet in der Nähe einer Graphitplatte zum Schweben gebracht werden, wenn ein anderes Magnetfeld den kleinen Magneten anzieht. Ich habe mich mit diesem Effekt in zwei verschiedenen geometrischen Anordnungen (vertikal und lateral) auseinandergesetzt. Mithilfe zahlreicher Messungen und theoretischer Überlegungen habe ich den Levitationspunkt mathematisch berechnet und physikalisch beschrieben.

2. Theoretischer Hintergrund

2.1 Diamagnetismus

Diamagnetische Materialien haben die Eigenschaft, in einem externen Magnetfeld ein Magnetfeld zu erzeugen, das ersterem entgegengerichtet ist. Alle Materialien, deren diamagnetischer Effekt größer ist als alle anderen magnetischen Ausprägungen wie Paramagnetismus oder Ferromagnetismus, werden als Diamagneten bezeichnet [2]. Dieser Effekt kommt nur in der Präsenz eines externen Magnetfeldes zur Ausprägung. Ansonsten erzeugt das Material von sich aus kein Magnetfeld: Der Diamagnet hat keine magnetische Ordnung. Die magnetische Suszeptibilität χ dieser Materialien ist negativ [3]. Dem-

entsprechend ist auch deren relative magnetische Permeabilität μ zwischen 0 und 1, da $\chi = \mu - 1$. Somit hat der perfekte Diamagnet (ein Supraleiter) eine magnetische Permeabilität von 0. Langevins klassische Theorie beschreibt den Diamagnetismus als einen Effekt der Elektronenorbitale [4]. Diese werden durch die Präsenz eines externen Magnetfeldes beschleunigt und geordnet, und somit der magnetische Dipol des Orbitals verändert. Diese induzierten Stromschleifen in den Orbitalen sind dem externen Magnetfeld entgegengesetzt.

2.2 Magnetische Dipole

Ein magnetischer Dipol ist die einfachste Näherung zur Beschreibung eines magnetischen Elements. In dieser Arbeit werden alle Magnete als einfache magnetische Dipole mit einem magnetischen Dipolmoment behandelt. Die magnetische Flussdichte bzw. das magnetische Feld, das dieser Dipol an einem Ort mit dem Abstandsvektor \vec{r} zum Ort des Dipols erzeugt, lässt sich durch folgende Gleichung beschreiben [8]:

$$\vec{B}_{dip}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi r^2} \frac{(3\vec{r}(\vec{r} \cdot \vec{m}) - r^2 \vec{m})}{r^3} \quad (1)$$

Man kann erkennen, wie das magnetische Feld eines Dipols von dem Abstandsvektor \vec{r} und seinem Skalarprodukt mit dem magnetischen Dipolmoment \vec{m} , das dieses Feld erzeugt, abhängt. μ_0 ist die magnetischen Permeabilität im Vakuum. Die potentielle Energie eines Dipols in einem externen Magnetfeld ist das Skalarprodukt des magnetischen Dipolmoments mit dem externen Magnetfeld:

$$U_m = -\vec{m}_1 \cdot \vec{B}_{dip} \quad (2)$$

Dementsprechend ist die Kraft, die dieser Dipol in einem externen Magnetfeld spürt, der negative Gradient dieser potentiellen Energie:

$$\vec{F}_m = -\nabla U_m = \nabla(\vec{m}_1 \cdot \vec{B}_{dip}) \quad (3)$$

Diese Gleichung wird im Folgenden benutzt, um die Kraft auf einen schweben-

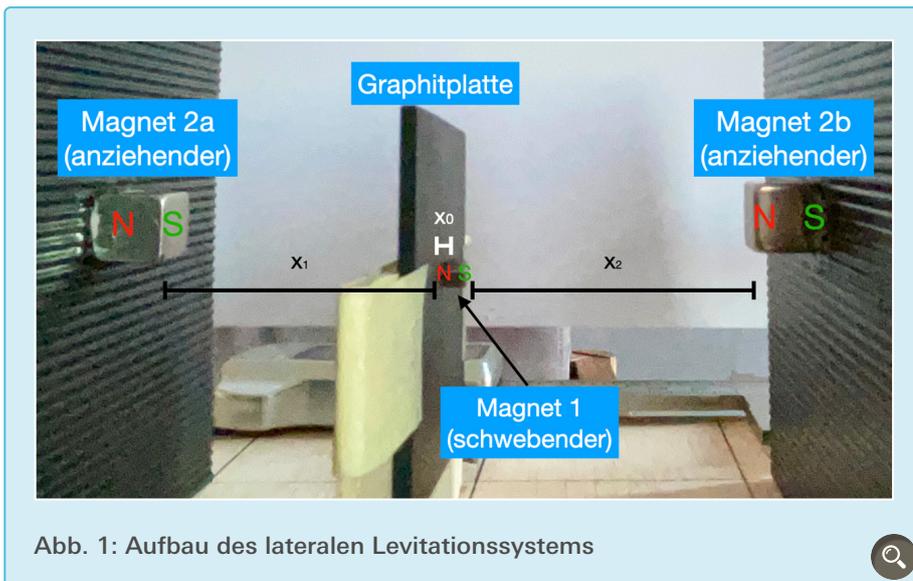


Abb. 1: Aufbau des lateralen Levitationssystems

denden Magneten im Magnetfeld zweier anderer Magnete zu berechnen.

2.3 Earnshaw-Theorem

Earnshaws Theorem besagt, dass es kein statisches magnetisches oder elektrisches Feld gibt, das Objekte in einem stabilen Gleichgewicht halten kann [10]. Das bedeutet, dass überall dort, wo es ein theoretisches Gleichgewicht gibt – wie z.B. zwischen der magnetischen Anziehung und der Erdanziehungskraft – dieses Gleichgewicht instabil ist, da kein Minimum in der potentiellen Energie gefunden werden kann. In diesem Beispiel wäre das Gleichgewicht in der Ebene stabil und in der orthogonalen Richtung instabil, also ein Sattelpunkt. Um zu einem stabilen Gleichgewicht zu kommen, müsste es zu einem Minimum in der potentiellen Energie kommen, sodass jede kleine Perturbation (Störung) des Systems dazu führen würde, dass der Magnet von selbst aus zum Minimum zurückkehrt.

Ziel der Arbeit ist, mittels eines Experimentes dem Earnshaw-Theorem zu entkommen und ein Minimum in der potenziellen Energie zu finden.

3. Experimenteller Aufbau

Für alle Experimente wird eine pyrolytische Graphitplatte (50 mm × 50 mm × 2 mm) mit stark

ausgeprägten diamagnetischen Eigenschaften verwendet. Als anziehende Magnete wurden würfelförmige Neodym-Magnete mit 10 mm Kantenlänge und große quaderförmige Magnete (40 mm × 20 mm × 10 mm) verwendet. Als schwebende Magnete kamen kleine würfelförmige Neodym-Magnete mit 3, 4 und 5 mm Kantenlänge zum Einsatz.

3.1 Laterale Levitation

In der Abb. 1 sind die beiden großen, würfelförmigen Neodym-Magnete (Kantenlänge 10 mm) mit anziehender Funktion zu sehen. Sie sind jeweils auf einer Plattform befestigt, die millimetergenau bewegt werden kann.

Als schwebende Magnete werden Neodym-Magnete mit Kantenlängen von 3, 4 oder 5 mm verwendet. Mit einem digitalen Messschieber wird permanent der Abstand zwischen den anziehenden und dem schwebenden Magneten gemessen. Mit einer Kamera wird der Schwebezustand kontrolliert.

Bei jeder Magnetkombination wird immer das gleiche Prozedere durchgeführt. Zuerst wird der Abstand zwischen den zwei anziehenden Magneten bis zu einem approximierten Punkt reduziert, wo keine Levitation stattfinden kann und die Position des schwebenden Magnets instabil ist. Danach werden beide Magnete voneinander in Ein-Millimeter-Schritten entfernt, zuerst der rechte Magnet (M2b) und dann der linke Magnet (M2a), bis es zu einem Levitationspunkt kommt. Ab diesem Moment wird der Prozess in 1,5-Millimeter-Schritten weitergeführt, bis der Magnet 1 fällt, weil die vertikale Komponente der beiden magnetischen Kräfte nicht mehr ausreicht, die Erdanziehung zu kompensieren. Danach wird das gleiche umgekehrt gemacht und nach dem Punkt gesucht, wo der Magnet aufgrund der Instabilität aufhört zu schweben, indem die Magneten wieder in 0,5-Millimeter-Schritten aneinander angenähert werden. Bei jeder Messung wird der Abstand sowohl vom zweiten anziehenden Magnet zum schwe-

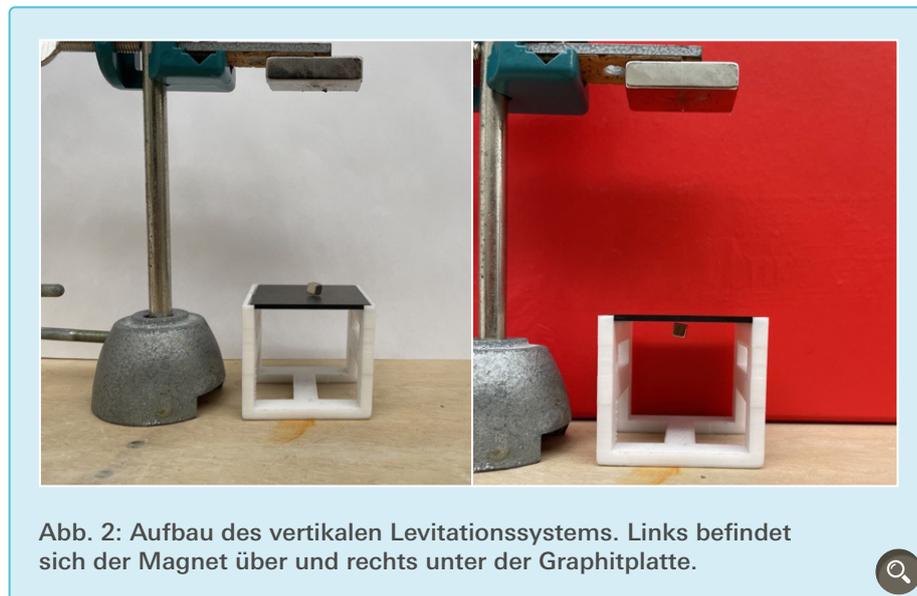


Abb. 2: Aufbau des vertikalen Levitationssystems. Links befindet sich der Magnet über und rechts unter der Graphitplatte.

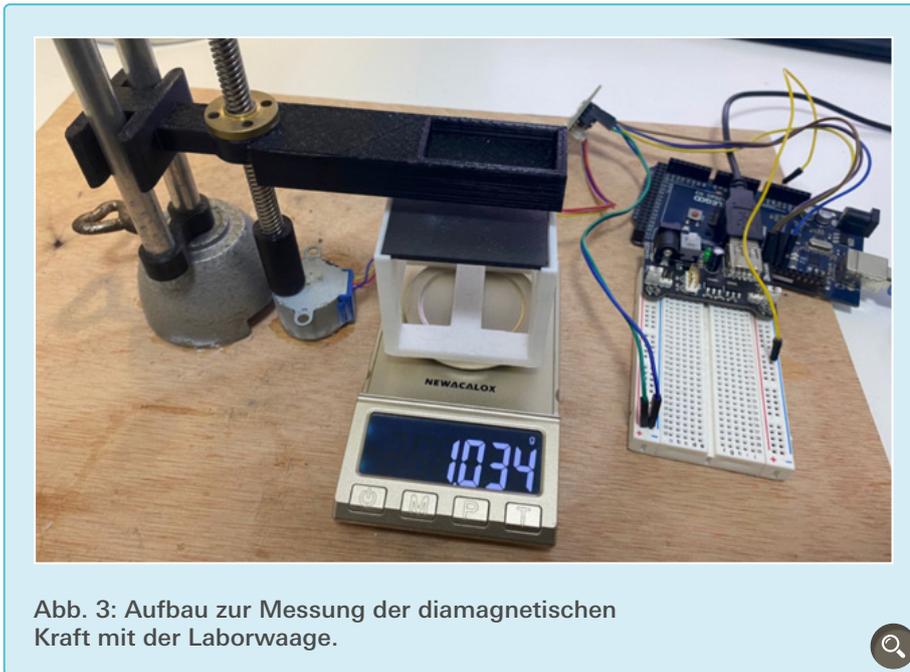


Abb. 3: Aufbau zur Messung der diamagnetischen Kraft mit der Laborwaage.

benden als auch der Abstand zum ersten sowie die relative Höhe bzw. Tiefe zur Symmetrieachse zwischen beiden anziehenden Magneten notiert. Diese Messungen werden für alle anziehenden Magneten jeweils mit jeder Größe schwebender Magnete durchgeführt.

3.2 Vertikale Levitation

Bei der vertikalen Levitation (siehe [Abb. 2](#)) gibt es nur einen großen Magneten (40 mm × 20 mm × 10 mm), der den schwebenden Magneten anzieht. Letzterer befindet sich entweder oberhalb oder unterhalb der Graphitplatte. Bei diesen Messungen wird der anziehende Magnet der Graphitplatte angenähert, um den Levitationspunkt zu ermitteln.

3.3 Messung der diamagnetischen Kraft

Um die Kraft zu messen, mit der die pyrolytische Graphitplatte die Magnete abstößt, wurde die Platte auf eine nichtmagnetische Laborwaage gelegt (siehe [Abb. 3](#)). Über der Graphitplatte befand sich der Magnet. Mit dem selbstgebauten Höhenkontrollsystem variierte ich den Abstand zwischen dem Graphit und dem Magnet. Da das Graphit den Magneten abstößt, drückt das Graphit

zusätzlich auf die Laborwaage. Dieser zusätzliche Gewichtsanteil wird mit $g = 9,814 \text{ m/s}^2$ in die diamagnetische Kraft umgerechnet.

3.4 Messung des magnetischen Moments

Für die experimentelle Bestimmung des magnetischen Moments der einzelnen Magnete benutze ich immer zwei Magnete. Sie werden so ausgerichtet, dass die magnetischen Momente vertikal sind und dann einander angenähert. Dabei gibt es einen Punkt, an dem die Gewichtskraft des unteren Magneten gleich der anziehenden magnetischen Kraft durch den oberen Magneten ist. Diese Distanz z messe ich. Es gilt

dann Glg. 4.

Das gleiche wird mit einer anderen Kombination von zwei Magneten wiederholt. Um die magnetischen Momente von drei Magneten zu bestimmen, ergeben sich insgesamt drei Kombinationen und somit ein Gleichungssystem mit drei Unbekannten (Glg. 5), mit dessen Hilfe die magnetischen Momente $|\vec{m}_1|$, $|\vec{m}_2|$ und $|\vec{m}_3|$ bestimmt werden können.

$$mg = \frac{6\mu_0|\vec{m}_1||\vec{m}_2|}{4\pi z^4} \quad (4)$$

$$|\vec{m}_1||\vec{m}_2| = \frac{4\pi m_1 g z_1^4}{6\mu_0}$$

$$|\vec{m}_1||\vec{m}_3| = \frac{4\pi m_1 g z_2^4}{6\mu_0}$$

$$|\vec{m}_2||\vec{m}_3| = \frac{4\pi m_2 g z_3^4}{6\mu_0} \quad (5)$$

4. Messergebnisse

Das Ziel des Projektes ist es, den Levitationspunkt mathematisch zu berechnen und physikalisch zu beschreiben. Um diesen theoretischen Ansatz zu überprüfen, sind korrekte Messungen erforderlich.

Bei der lateralen Levitation (siehe [Tab. 2](#)) gibt es in der x -Achse drei verschiedene Abstände: x_0 ist der Abstand zwischen dem schwebenden Magneten und der Graphitplatte, der aus technischen Gründen nicht messbar ist. x_1 beschreibt die Distanz zwischen dem

Tab. 1: Magnetische Momente der verwendeten Magnete

Name	Beschreibung	Magnetisches Moment in Am ²	Masse in g
M1 (schwebend)	Würfel mit 3 mm Kantenlänge	0,027	0,1998
M2 (anziehend)	Würfel mit 10 mm Kantenlänge	0,817	7,4
M3 (anziehend)	Quader mit 40 mm x 20 mm x 10 mm	4,945	

schwebenden und dem linken Magnet (M2a), während x_2 die zwischen dem schwebenden und dem rechten Magnet (M2b) darstellt. Zuletzt gibt es noch die Position in der y- und z-Achse. Für die y-Achse und die z-Achse wird der Nullpunkt so definiert, dass er in der Symmetrieachse beider anziehenden Magneten liegt. Aufgrund der Konstruktion und der Stabilitätsbedingung hat der schwebende Magnet immer die Position $y = 0$.

Diese Messungen wurden auch mit allen anderen Magneten durchgeführt (siehe Appendix und Hinweis am Ende der Arbeit.). In [Tab. 3](#) bezieht sich die Position, an der der Magnet anfängt bzw. aufhört zu schweben, auf den Abstand zwischen dem anziehenden Magnet M3 und der Graphitplatte.

5. Berechnung des Levitationspunktes

Für die theoretische Betrachtung wird das System sowohl mithilfe der Energiebilanz als auch über das Kräftegleichgewicht beschrieben.

Grundsätzlich verhalten sich beide Levitationstypen (vertikal und horizontal) gleich: In der Nähe der Graphitplatte, wo es durch die Überlagerung der beiden Magnetfelder eigentlich zu einem Maximum in der potentiellen magnetischen Energie kommen müsste, gibt es einen Bereich, in dem sich ein Minimum in der potentiellen Energie formt, eine Art Delle in der potentiellen Energie. An diesem Punkt kann der kleine Magnet stabil schweben. Es entsteht somit ein Gleichgewicht der magnetischen Kraft und der Erdanziehungskraft. Bei jeder kleinen Bewegung des Magnets bewegt die magnetische Kraft, also der Gradient der potentiellen Energie, den Magneten zurück zum Schwebepunkt, solange der Magnet dieses lokale Minimum nicht verlässt.

Der schwebende Magnet befindet sich in einem externen Magnetfeld. Dieses Feld wird prinzipiell von drei (bei der verti-

Tab. 2: Messwerte zur lateralen Levitation bei Verwendung von M1 und M2

Messung	x_1 : Abstand M2a - Graphit in m	x_2 : Abstand M2b - Graphit in m	Höhe z in m
1	0,0335	0,0400	-0,0020
2	0,0362	0,0425	-0,0025
3	0,0380	0,0450	-0,0035
4	0,0401	0,0475	-0,0050
5	0,0415	0,0500	-0,0065
6	0,0420	0,0510	-0,0080

Tab. 3: Vertikale Levitation mit M1 und M3

Levitationstyp	Höhe, bei der M1 zu schweben beginnt, in m	Höhe, bei der M1 zu schweben aufhört, in m
Oberhalb	0,0925	0,0900
Unterhalb	0,0750	0,0780

kalen Levitation: zwei) magnetischen Dipolen erzeugt: Zum einen durch die beiden anziehenden Magneten (bei der vertikalen Levitation nur ein anziehender Magnet) und zum anderen von dem Dipol, das der kleine, schwebende Magnet in der diamagnetischen Graphitplatte induziert und das dem erzeugenden Magnetfeld entgegensteht.

$$\vec{B}_t = \vec{B}_{M2a} + \vec{B}_{M2b} + \vec{B}_d \tag{6}$$

Das magnetische Feld des linken Magnets (Magnet 2a in [Abb. 1](#)) bezeichne ich als \vec{B}_{M2a} . Es wird von einem magnetischen Dipol mit dem Moment \vec{m}_2 erzeugt, genauso wie das Feld des rechten Magnets \vec{B}_{M2b} , wo-

bei das Moment ebenfalls \vec{m}_2 ist. \vec{B}_d ist das Feld des induzierten Dipols in der Graphitplatte.

Aus [Abb. 1](#) wird deutlich, dass alle Magnete nahezu gleich ausgerichtet sind. Im Folgenden wird daher die Näherung verwendet, dass die magnetischen Momente der Magnete parallel sind und nur eine x-Komponente aufweisen.

Gleichung (7)

Wo x jeweils x_1 oder x_2 ist, je nach dem, ob das Magnetfeld für den rechten oder linken Magnet beschrieben wird. $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, sind die jeweiligen Einheitsvektoren in den x-, y- und z-Achsen.

$$\vec{B}_{M2}(\vec{r}, \vec{m}_2) = \frac{\mu_0 [3(|\vec{m}_2| x^2 \vec{i} + |\vec{m}_2| xy \vec{j} + |\vec{m}_2| xz \vec{k}) - |\vec{m}_2|(x^2 + y^2 + z^2) \vec{i}]}{4\pi(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}}$$

Gleichung (7)

Um den magnetischen Dipol der diamagnetischen Graphitplatte und somit sein Feld zu beschreiben, gibt es zwei Ansätze. Zum einen habe ich mit der in 3.3 erklärten Methode die Kraft, die auf den kleinen Magneten wirkt, experimentell gemessen. Zum anderen kann das Feld dieses induzierten Dipols \vec{B}_d als linear-proportional zum Erregermagnetfeld \vec{B}_{ext} (siehe Gleichung 8) definiert werden, wobei der Proportionalitätsfaktor eine Materialeigenschaft ist, bzw. von einer solchen abhängt. Diese Materialeigenschaft (z.B. γ) wird im Nachhinein aus Messungen der diamagnetischen Kraft ermittelt und mit den theoretisch berechneten Levitationspunkten korrigiert, damit letztere mit den Experimenten übereinstimmen. Daraus ergibt sich $\gamma_d = 2 \cdot 10^{-7}$.

$$\vec{B}_d = \gamma_d \vec{B}_{ext} \quad (8)$$

Dadurch dass die Graphitplatte sich in einem Magnetfeld befindet, das von drei verschiedenen Magneten geformt wird, ist das externe Magnetfeld die vektorielle Summe aller dieser Magnetfelder und somit

$$\vec{B}_d = \gamma_d (\vec{B}_{M1} + \vec{B}_{M2a} + \vec{B}_{M2b}) \quad (9)$$

Jedoch und obwohl Magnet 2a und Magnet 2b deutlich stärker als Magnet 1 sind, unterscheiden sich die Abstände stark, sodass

$$|\vec{B}_{M1}| \gg |\vec{B}_{M2a} + \vec{B}_{M2b}| \quad (10)$$

und die Magnetfelder von Magnet 2a und 2b vernachlässigt werden können.

So ergibt sich Glg. 11 für das gesamte Magnetfeld:

Gleichung (11)

Hier sind x_0 , x_1 und x_2 die jeweiligen Abstände zwischen den Magneten, wie schon zuvor erklärt. In meiner Aufstellung muss $x_1 < x_2$ sein, da sonst der Magnet zum rechten anziehenden Magneten gezogen werden würde. Jetzt, wo alle Magnetfelder und magnetischen Momente bekannt sind, kann die Levitation theoretisch beschrieben werden.

5.1 Energetischer Ansatz

Damit die Levitation erfolgt bzw. damit sich der kleine Magnet in einem stabilen Schwebezustand halten kann, muss er sich in einem Minimum seiner potentiellen Energie befinden. Demzufolge muss sich ein lokales relatives Minimum der potentiellen Energie U_t des gesamten magnetischen Feldes und des Gravitationsfeldes im Levitationspunkt befinden.

$$U_t = -\vec{m}_1 \cdot \vec{B}_t + mgz \quad (12)$$

Gleichung (13)

wobei m die Masse des schwebenden Magnets und g die Erdbeschleunigung ist.

Abb. 4 zeigt das Achsensystem bei der lateralen Levitation.

Da die Energie nicht in Abhängigkeit von x , y und z grafisch dargestellt werden kann, wird immer nur die Abhängigkeit von einer oder zwei Achsen betrachtet. Bereits durch die Betrachtung der Gleichung wird deutlich, dass es bei $y = 0$ eine Minimumregion gibt. Jedoch passiert dasselbe nicht in der z -Achse, weil in dieser Achse die potentielle Gravitationsenergie wirkt. Von besonderem Interesse ist daher, was an der x -Achse und der xz -Ebene passiert. Wie schon gesagt, muss es, damit es zu einer stabilen Levitation kommen kann, zu einem relativen Minimum in der potentiellen Energie kommen. Somit ist zu erwarten, dass bei der Betrachtung dieser gesamten potentiellen Energie aus Glg. 13 ein Minimum in der x -Achse bzw. in den xy - und xz -Ebenen sichtbar wird. Dabei verwende ich eine Abstandskombination zwischen M2a-Graphit und M2b-Graphit aus Tabelle 2 (dort Nummer 5). Aus diesen Daten, kombiniert mit der oben genannten Glg. 13, erstelle ich in Excel eine Wertetabelle und plote die Diagramme, die im Folgenden erläutert werden.

Abb. 5 zeigt die potentielle Energie U_t in Abhängigkeit von x , wobei $y = 0$ und $z = -0,007$ m gewählt wurde. Wie erkennbar, gibt es in der Nähe der Graphitplatte ($x = 0$) ein Minimum der potentiellen Energie, bevor es zum Maximum kommt.

$$\vec{B}_t = \frac{\mu_0 |\vec{m}_2|}{4\pi} \frac{(2x_1^2 \vec{i} + 3x_1 y \vec{j} + 3x_1 z \vec{k} - y^2 \vec{i} - z^2 \vec{i})}{(x_1^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} + \frac{\mu_0 |\vec{m}_2|}{4\pi} \frac{(2x_2^2 \vec{i} + 3x_2 y \vec{j} + 3x_2 z \vec{k} - y^2 \vec{i} - z^2 \vec{i})}{(x_2^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} + \frac{2\gamma_d \mu_0 |\vec{m}_1|}{4\pi x_0^3} \vec{i}$$

Gleichung (11)

$$U_t = -\frac{\mu_0 |\vec{m}_1| |\vec{m}_2|}{4\pi} \frac{(2x_1^2 - y^2 - z^2)}{(x_1^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} - \frac{\mu_0 |\vec{m}_1| |\vec{m}_2|}{4\pi} \frac{(2x_2^2 - y^2 - z^2)}{(x_2^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} - \frac{2\mu_0 \gamma_d |\vec{m}_1|^2}{4\pi x_0^3} + mgz$$

Gleichung (13)

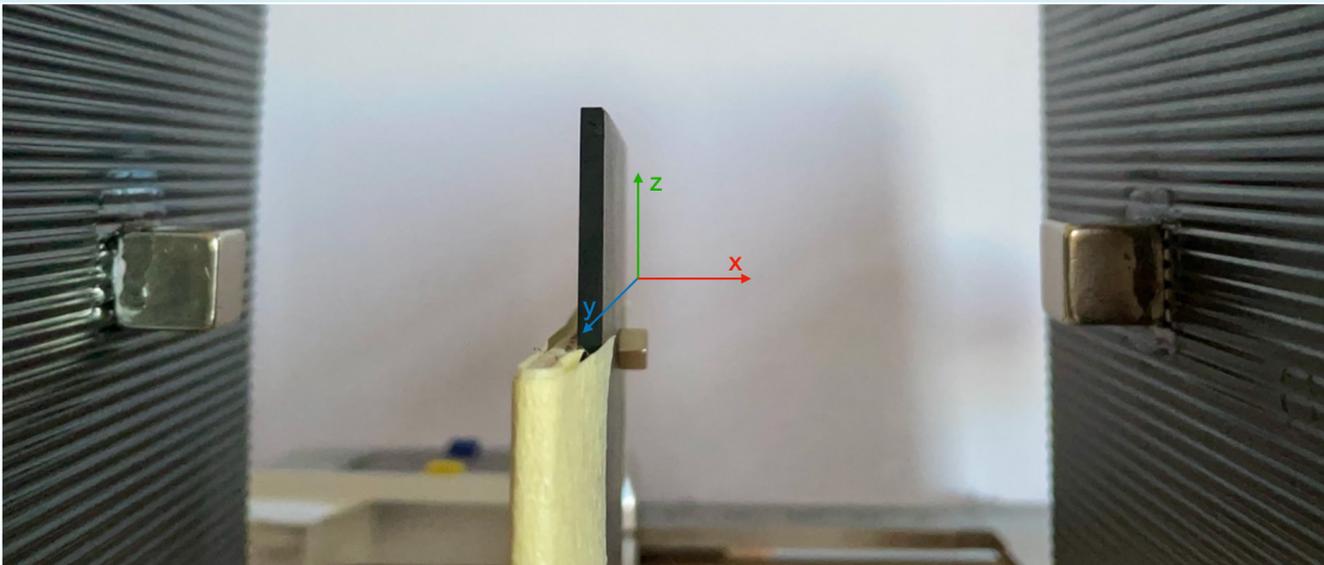


Abb. 4: Achsensystem bei der lateralen Levitation



Abb. 6 zeigt die potentielle Energie U_t in Abhängigkeit von x und z , wobei $y = 0$ gewählt wurde. Die Farben stehen jeweils für ein Intervall der potentiellen Energie U_t .

In Abb. 7 ist klar zu erkennen, dass die Stabilität bzw. das energetische Minimum in der xy -Ebene auf jeden Fall gegeben ist.

Die Berechnungen zeigen also, dass es ein Minimum bei $x = 0,00075$ m (Abstand Graphit-M1); $y = 0$; $z = -0,007$ m

gibt. Somit liegt dort ein stabiler Punkt bzw. ein stabiler Bereich vor, wo der Magnet schweben kann.

5.2 Betrachtung des Kräftegleichgewichts

Damit es zu einer Levitation kommen kann, muss für den schwebenden Magneten ein Kräftegleichgewicht gelten. Somit muss die vektorielle Summe aller Kräfte gleich null sein.

$$\Sigma \vec{F} = \vec{F}_m + \vec{F}_g = 0 \tag{14}$$

Gleichung (15)

Um den Rahmen der Arbeit nicht zu sprengen, wurden die einzelnen Ableitungen in diesem Fall weggelassen und es wird nur der Gradient dargestellt. In den Grafiken werden selbstverständlich die Ableitungen verwendet.

Obwohl die Vertikale der magnetischen Kraft von der Position in der x -Achse abhängt, ist dieser Beitrag im untersuchten Bereich so gering, dass er für unsere Zwecke der Darstellung des Gleichgewichts in der x -Achse als konstant ($z = -0,007$ m) angenähert werden kann. Dieser Wert wurde mittels

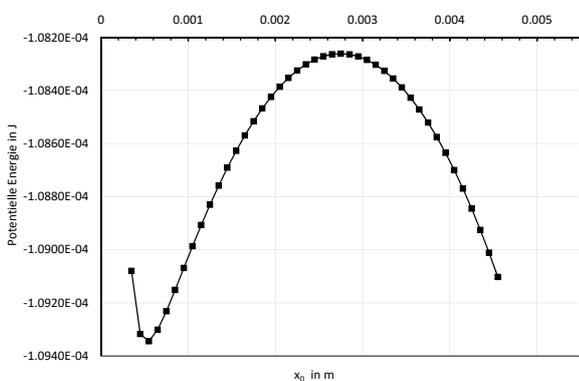


Abb. 5: Verlauf der potentiellen Energie U_t in Abhängigkeit von x_0 , wobei x_0 der Abstand des schwebenden Magneten zur Graphitplatte ist.

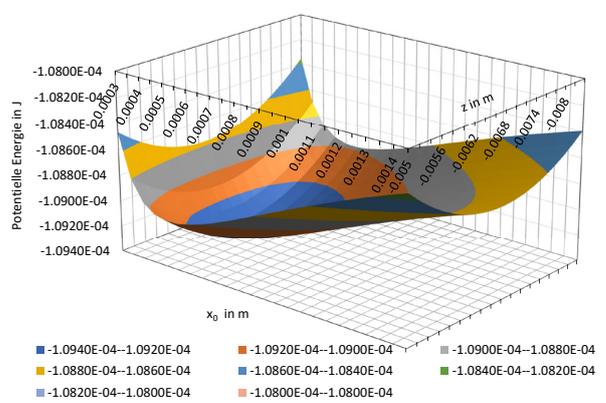


Abb. 6: Verlauf der potentiellen Energie U_t für $y = 0$ in Abhängigkeit von x_0 und z , wobei x_0 der Abstand des schwebenden Magneten zur Graphitplatte ist.



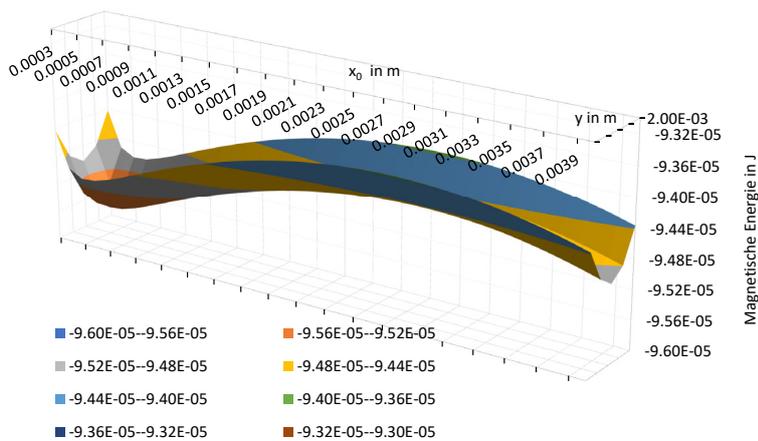


Abb. 7: Verlauf der potentiellen Energie U_t in Abhängigkeit von x_0 und y , wobei x_0 der Abstand des schwebenden Magneten zur Graphitplatte ist und y die Position in Bezug auf die Symmetrieachse angibt.

Exceltabellen ermittelt, indem zu jedem z -Wert die Summe der vertikalen Komponente der magnetischen Kraft und der Erdanziehungskraft angegeben wurde. Bei $z = -0,007$ m ist die Summe 0 (also Gleichgewicht).

Nun müssen noch die Punkte gefunden werden, die diese Gleichung erfüllen. Dabei ist jedoch zu berücksichtigen, dass nicht jeder Punkt mit einem Kräftegleichgewicht automatisch eine Levitation ermöglicht. Es muss vielmehr auch die Stabilität gewährleistet sein. Diese Stabilität wird erreicht, wenn rückstellende Kräfte auftreten, die den Magneten beim Verlassen der Gleichgewichtsposition in Richtung des Gleichgewichtspunkts treiben.

In Abb. 8 ist zu erkennen, dass es zwei Punkte gibt, bei denen die Summe der Kräfte gleich null ist. Jedoch schwebt der Magnet nur am linken Punkt. Grund dafür ist die Stabilität. Im rechten Punkt gibt es keine Stabilität, da – wie im Earnshaw-Theorem beschrieben – jede

entweicht das hier konstruierte Levitationssystem dem Earnshaw-Theorem und ermöglicht unter den beschriebenen Voraussetzungen einen stabilen Gleichgewichts- bzw. Schwebepunkt.

Das Verständnis dieses Phänomens fällt leichter, wenn nicht mehr die magnetische Kraft \vec{F}_m betrachtet wird, sondern die magnetischen Einzelkräfte \vec{F}_{m2a} und \vec{F}_{m2b} sowie die diamagnetische Kraft und die jeweiligen Komponenten in x -, y - bzw. z - Richtung (siehe Abb. 9).

Im Folgenden wird unter der diamagnetischen Kraft die magnetische Kraft verstanden, die das induzierte magnetische Feld im Graphit auf den schwebenden Magneten ausübt.

Um das Gleichgewicht bezogen auf jede Achse unabhängig zu beschreiben, wird die magnetische Kraft in ihre vertikale (z) und horizontale (x) Komponente zerlegt (siehe Abb. 10).

$$F_{mx} = \frac{\partial(\vec{m} \cdot \vec{B})}{\partial x} = \frac{-\mu_0 |\vec{m}_1| |\vec{m}_2|}{4\pi(x^2 + y^2 + z^2)^{7/2}} \cdot 3x[2x^2 - 3(y^2 + z^2)]$$

Gleichung (18)

$$F_{my} = \frac{\partial(\vec{m} \cdot \vec{B})}{\partial y} = \frac{\mu_0 |\vec{m}_1| |\vec{m}_2|}{4\pi(x^2 + y^2 + z^2)^{7/2}} \cdot 3y[y^2 + z^2 - 4x^2]$$

Gleichung (19)

$$F_{mz} = \frac{\partial(\vec{m} \cdot \vec{B})}{\partial z} = \frac{\mu_0 |\vec{m}_1| |\vec{m}_2|}{4\pi(x^2 + y^2 + z^2)^{7/2}} \cdot 3z[z^2 + y^2 - 4x^2]$$

Gleichung (20)

$$\vec{F}_m = \nabla(\vec{m}_1 \cdot \vec{B}_t) \quad \vec{F}_m = \nabla\left(\frac{\mu_0 |\vec{m}_1| |\vec{m}_2|}{4\pi} \frac{(2x_1^2 - y^2 - z^2)}{(x_1^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} + \frac{\mu_0 |\vec{m}_1| |\vec{m}_2|}{4\pi} \frac{(2x_2^2 - y^2 - z^2)}{(x_2^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} + \frac{2\mu_0 \mu_d \gamma_d |\vec{m}_1|^2}{4\pi x_0^3}\right)$$

Gleichung (15)

$$|\vec{F}_g| = |\vec{F}_{z-M2a} + \vec{F}_{z-M2b}| \quad (16)$$

$$|\vec{F}_{x-M2a}| = |\vec{F}_d + \vec{F}_{x-M2b}| \quad (17)$$

Um schließlich die magnetische Kraft zu erhalten, werden zunächst die einzelnen magnetischen Kräfte aus Glg. 15 aufgeteilt und unabhängig als magnetische Kräfte betrachtet, die von einem einzelnen Dipol erzeugt werden. Das heißt, ich betrachte es nicht als ein gesamtes Magnetfeld, wie zuvor, sondern als separate einzelne Magnetfelder. Dazu benutze ich die generalisierte Form der Kraft (siehe Glg. 3) und bestimme den Gradienten, indem ich die Gleichung nach x ableite, um die x-Komponente der Kraft zu erhalten und nach y für die y-Komponente bzw. z für die z-Komponente.

[Gleichung \(18\)](#)

[Gleichung \(19\)](#)

[Gleichung \(20\)](#)

Zuletzt wird noch die diamagnetische Kraft benötigt. Diese kann wieder als die Kraft eines induzierten Magnetfeldes berechnet werden, wie ich es schon bei Glg. 8 getan habe. In diesem Fall verwende ich indes eine andere Methode und zwar die experimentelle Bestimmung dieser Kraft (siehe Methode zur Messung der diamagnetischen Kraft). [Abb. 11](#) zeigt, dass sie nur von der lateralen Position abhängt, d. h. vom Abstand zwischen dem Magneten und der Graphitplatte. Glg. 21 ist die Fit-Kurve für die experimentellen Werte berechneten Werte der diamagnetischen Kraft.

$$F_d(x) = 0,0013e^{-4464x} \quad (21)$$

Jetzt, wo alle nötigen Funktionen bekannt sind und die Variablen definiert werden können, suche ich nach dem Punkt, in dem sich die Gleichungen 16 und 17 erfüllen und dementsprechend die Levitation stattfinden kann. Nichtsdestotrotz muss auch die Stabilität berücksichtigt werden bzw. gewährleistet sein. Vertikal ist diese Stabilität, solange es eine ausreichend große vertikale

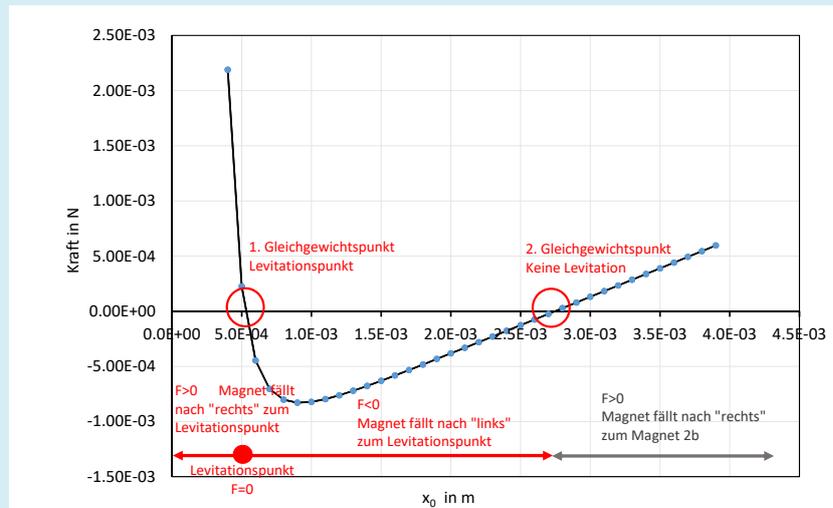


Abb. 8: x-Komponente der magnetischen Kraft \vec{F}_m für den Magneten M1 in Abhängigkeit vom Abstand zum Graphit für $y = 0$ und $z = -0,007$ m

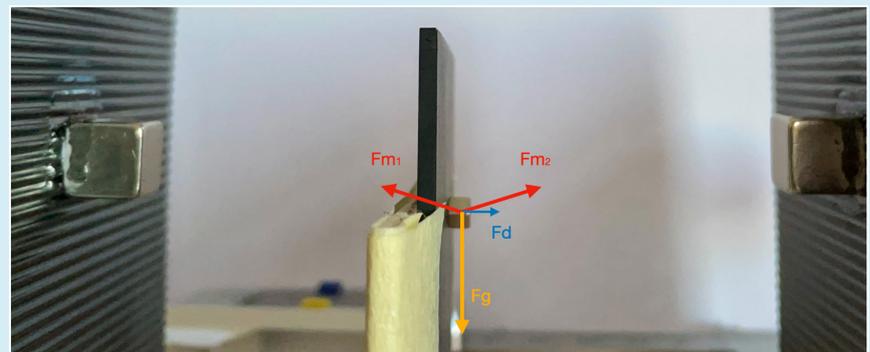


Abb. 9: Kräfte, die bei dem lateralen Levitationssystem auftreten

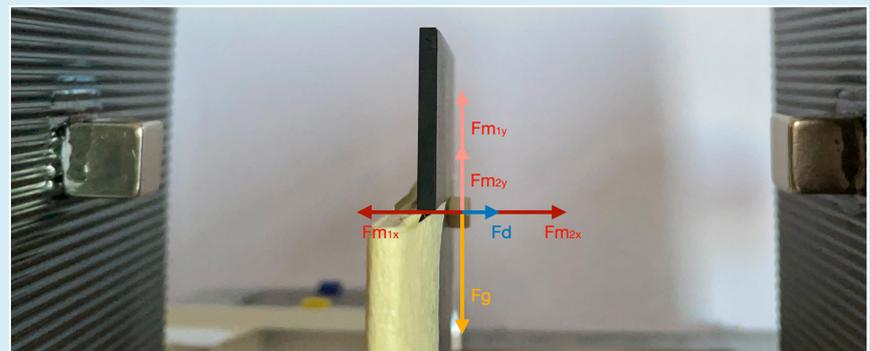


Abb. 10: Zerlegung der Kräfte im lateralen Levitationssystem auf die x-, y- und z- Achse

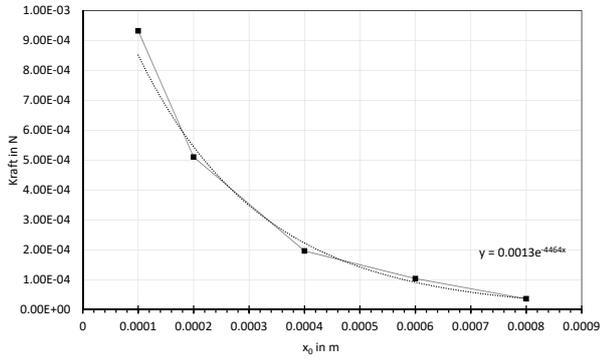


Abb. 11: Experimentell bestimmte diamagnetische Kraft für einen 3 mm großen Magneten (M1)

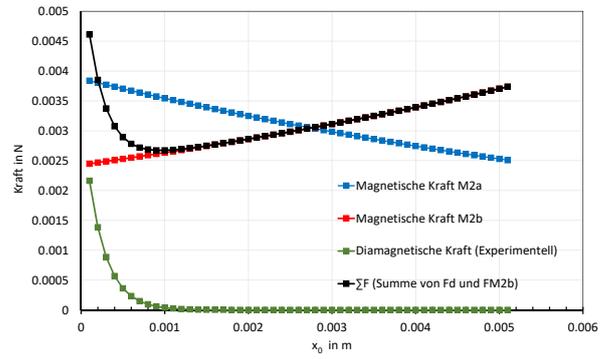


Abb. 12: x Komponenten der Kräfte bei der lateralen Levitation. Für die diamagnetische Kraft werden die experimentell ermittelten Werte verwendet.

magnetische Kraft gibt, einfach zu erreichen. Lateral jedoch ist dies schwieriger, weil die Stabilität so gestaltet sein muss, dass jede kleine Störung dazu führt, dass der Magnet wieder zum Levitationspunkt zurückkehrt.

In Abb. 12 sind wieder die zwei Gleichgewichtspunkte zu erkennen, an denen die Summe der Kräfte \vec{F}_d und \vec{F}_{m2b} (schwarz im Diagramm) genauso groß ist wie die Kraft \vec{F}_{m2a} (blau im Diagramm).

So lässt sich nun bestimmen, welche Kräfte die Stabilität kompensieren: Wird der Magnet nach links, d. h. näher an die Graphitplatte „geschubst“, ist $F_d + F_{M2b} > F_{M2a}$, und der Magnet wird zum Gleichgewicht abgestoßen. Wird der Magnet jedoch nach rechts gestoßen, d. h. von der Graphitplatte weg, dann ist $F_{M2a} > F_d + F_{M2b}$, und der Magnet fällt ins Gleichgewicht. Dies geschieht spätestens bis $F_{M2b} > F_{M2a}$ ist.

5.3 Die vertikale Levitation

Bei der vertikalen Levitation verhält es sich genauso. Die Bedingungen, was Stabilität und Kräftegleichgewicht angeht, sind die gleichen. Jedoch braucht man in diesem Fall nur das vertikale Gleichgewicht, da alles andere schon stabil ist. Die Levitation kann sowohl über als auch unter der Graphitplatte stattfinden (siehe Abb. 13).

In beiden Fällen muss sich der Magnet in einem energetischen Minimum befinden (siehe Abb. 14 und 15) bzw. die Summe aller Kräfte (siehe Abb. 16) muss null sein. Für die Kräfte gilt:

$$F_g = F_m + F_d \quad (22)$$

→ Magnet über der Graphitplatte

$$F_g = F_m + F_d \quad (23)$$

→ Magnet unter der Graphitplatte

Die Erdanziehungskraft ist die gleiche wie bei der lateralen Levitation und die magnetischen Kräfte, auch die diamagnetische Kraft, haben nur noch eine Komponente und sind folglich:

$$F_{mz} = \frac{\partial(\vec{m} \cdot \vec{B})}{\partial z} = \frac{-6\mu_0|\vec{m}_1||\vec{m}_2|}{4\pi z^4} \quad (24)$$

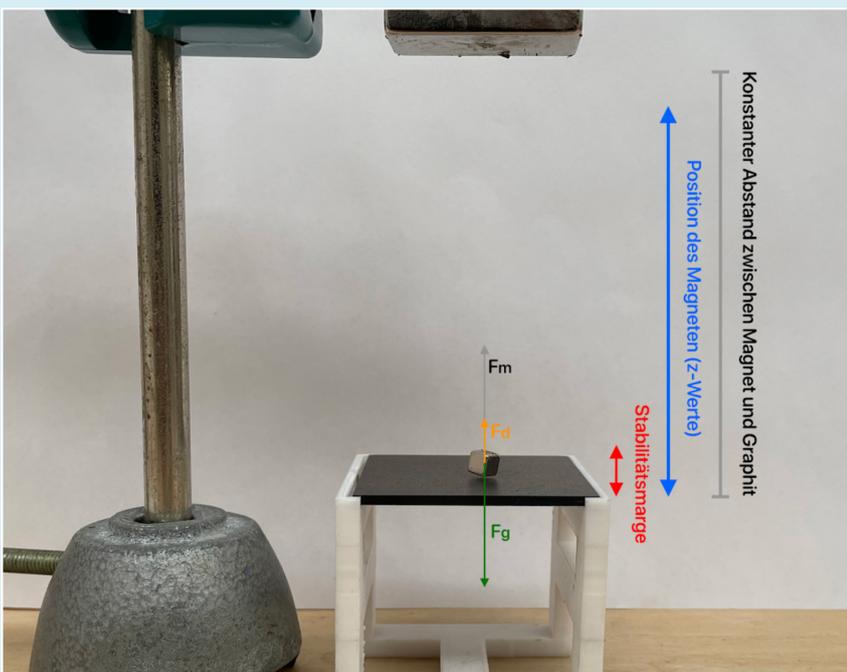


Abb. 13: Vertikale Levitation, der schwebende Magnet befindet sich über der Graphitplatte

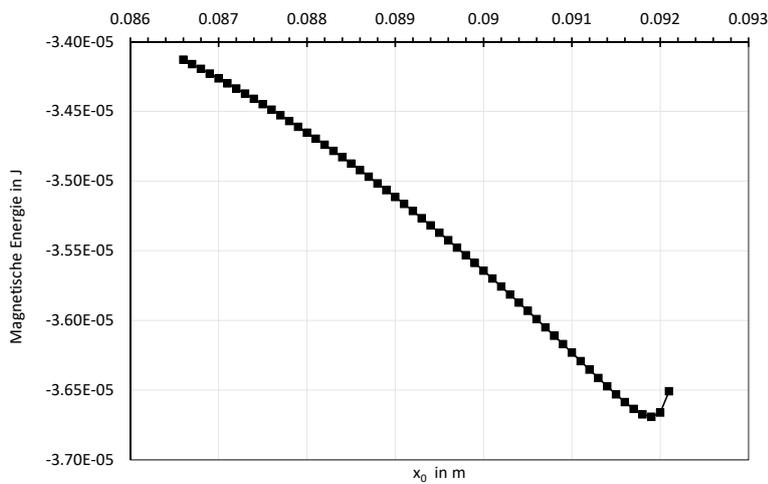


Abb. 14: Magnetische Energie in Abhängigkeit des Abstandes zur Graphitplatte für die vertikale Levitation eines Magnets, der sich über der Graphitplatte befindet. Die Graphitplatte ist bei $z = 0,0925$ m.

6. Diskussion

Alle Messungen wurden mit selbstgebaute Instrumenten und einem Messschieber durchgeführt. Daher ist zu berücksichtigen, dass ein bestimmter Fehlerbereich auftritt, wenn die Messergebnisse mit den mathematischen Ergebnissen verglichen werden. Die experimentell bestimmte diamagnetische Kraft weicht um einen Faktor 3 von der theoretisch berechneten ab. Ich bin zu dem Schluss gekommen, dass diese Abweichungen den Messungenauigkeiten und geometrischen Faktoren zugeschrieben werden können. Man muss berücksichtigen, dass hier mit sehr kleinen Distanzen gearbeitet wurde und das theoretische Modell nur eine Annäherung und Vereinfachung ist, was die Geometrie der Magneten und der diamagnetischen Platte angeht. Nichtsdestotrotz haben die zahlreichen durchgeführten Messungen den hier entwickelten theoretischen Ansatz zur Bestimmung des Levitationspunktes bestätigt.

7. Anwendungsmöglichkeit

Sowohl die laterale als auch die vertikale Levitation sind zwei interessante Levitationstypen, die eine Vielfalt an Anwendungen haben können. Ich habe auf einer theoretischen Basis an eine Applikation gedacht, die darauf basiert, dass ich das externe Magnetfeld in der y-Achse homogen gestalte, z. B. durch Helmholtz-Spulen. Für die stabile laterale Levitation sind im Grunde nur die x- und z-Achse maßgeblich. So kann er-

reicht werden, dass bei einem in der y-Achse homogenen Magnetfeld nicht mehr nur ein stabiler Punkt erzielt wird (wie bei Abb. 8), sondern eine Linie, eine Potentialmulde. Entlang dieser Linie oder auch Rille könnte sich der schwebende Magnet frei, stabil und reibungslos bewegen (siehe Abb. 17). Durch eine weitere Veränderung der Magnetfelder könnte sogar der schwebende Magnet mittels der Veränderung des externen Magnetfeldes bzw. des magnetischen Momentes der Magneten kontrolliert und beliebig positioniert werden.

8. Zusammenfassung

In meinem Projekt habe ich mich mit zwei experimentellen Situationen auseinandergesetzt, bei denen ein Magnet in der stabilen Schwebelage gehalten werden kann. Ich habe zahlreiche Messungen mit verschiedenen Magneten und Abstandskombinationen durchgeführt, und dabei die wichtigsten Eigenschaften jeder Levitation notiert. Die gemessenen Levitationspunkte habe ich mathematisch und physikalisch beschrieben und erklären können. Es ist mir damit gelungen, die Levitation vorherzusagen.

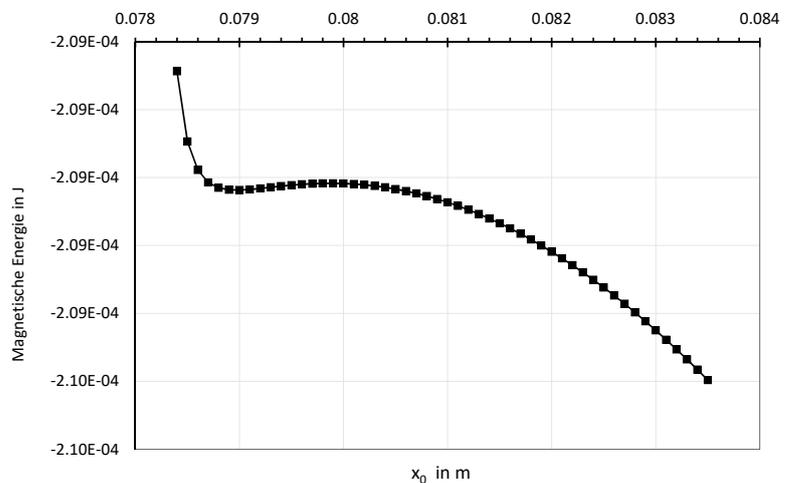


Abb. 15: Magnetische Energie in Abhängigkeit des Abstandes zur Graphitplatte für die vertikale Levitation eines Magnets, der sich unter der Graphitplatte befindet. Die Graphitplatte ist bei $z = 0,078$ m.

Appendix

Um den Umfang dieser Arbeit nicht zu sprengen, aber auch wegen ihres begrenzten Mehrwerts für die vorliegende Untersuchung, wurden die gebrauchten Gleichungsherleitungen, Messdaten und Grafiken ausgespart. Diese Daten sind unter folgendem Link zu finden: https://drive.google.com/drive/folders/1wtV-jIIWteMN5jJ_gegJ-c6L2AKXVsOJP

Danksagung

Ich danke Prof. Dr. Javier Urchueguía Schölzel von der Universität Valencia (UPV), und Prof. Dr. Alberto Pérez Izquierdo von der Universität Sevilla (US) für ihre wertvolle Unterstützung bei meiner Arbeit an diesem Projekt. Ein besonderer Dank geht vor allem an Miguel Gil Jimenez, mit dem ich jahrelang an dem Diamagnetismus geforscht und die Grundlagen dieser Arbeit geschaffen habe und auch an Ernesto Civera García, Betreuer meiner Jugendforschungs-Arbeit.

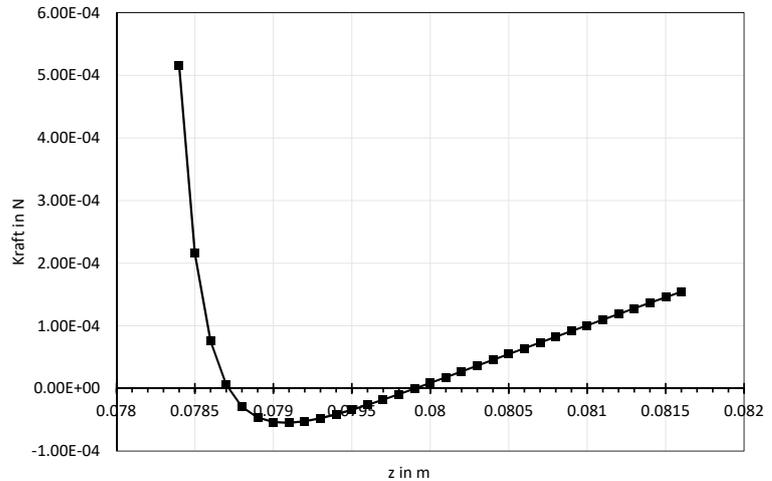


Abb. 16: Summe aller Kräfte, die bei der vertikalen Levitation wirken. Der Magnet befindet sich unterhalb der Graphitplatte.

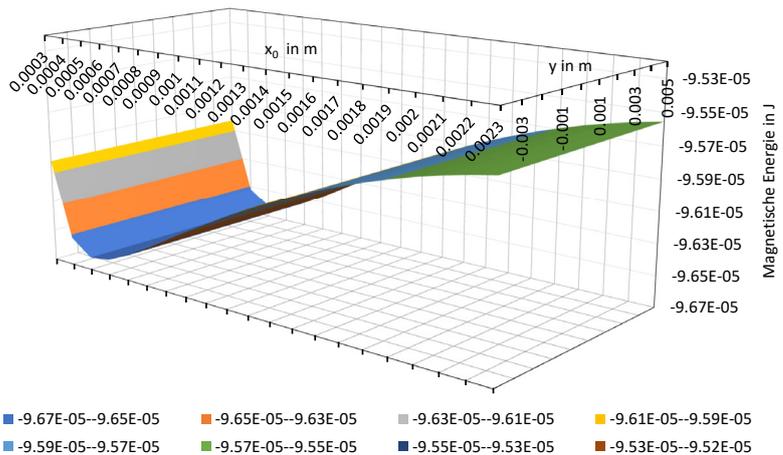


Abb. 17: In y-Richtung verlängertes energetisches Minimum bei homogenem gesamten B_y -Feld.

Quellen- und Literaturverzeichnis

- [1] Magnet Lexikon. *Diamagnetismus*
<https://www.magnet-shop.net/lexikon/dia-magnetismus>
- [2] Uni Ulm. *Magnetischen Eigenschaften der Materie* <http://wwwex.physik.uni-ulm.de/lehre/gk3b-2004-2005/node31.html>
- [3] Supermagneten. *Magnetische Suszeptibilität*
<https://www.supermagnete.de/magnetismus/suszeptibilitaet>
- [4] David J. Griffiths, *Introduction to electrodynamics*, dritte Auflage (Prentice Hall, London, 1999).
- [5] Diego Assencio. *A proof of Earnshaw's theorem*
<https://diego.assencio.com/?index=bc04395b103021d338b4e30a061bfc74>
- [6] Joaquín Feneca Ruedas, *Juguetes de levitación magnética* (TFG - Universidad de Sevilla, 2015).
- [7] Walter Greiner, *Theoretische Physik Band 3: Klassische Elektrodynamik* (Harri Deutsch – Thun und Frankfurt am Main, 1999).
- [8] Herbert Goldstein, *Klassische Mechanik*, 6. Auflage (Akademische Verlagsgesellschaft Wiesbaden, 1981).
- [9] John David Jackson, *Electrodinámica Clásica*, zweite Auflage (Editorial Alhambra, 1980).
- [10] M. D. Simon, L. O. Heflinger and A. K. Geim, “Diamagnetically stabilized magnet levitation” *American Journal of Physics*. 69, 702 (2001).
- [11] Alberto T. Pérez, Pablo García-Sánchez, Miguel A. S. Quintanilla, and Armando Fernández-Prieto “Levitation? Yes, it is possible!” *American Journal of Physics*. 87, 270 (2019)
<https://doi.org/10.1119/1.5092451>.
- [12] Andrey Geim, “Everyone’s Magnetism” *Physics today* 51, 9, 36
<https://doi.org/10.1063/1.882437>.

Publiziere auch Du hier!

Forschungsarbeiten von
Schüler/Inne/n und Student/Inn/en

In der Jungen Wissenschaft werden Forschungsarbeiten von SchülerInnen, die selbstständig, z. B. in einer Schule oder einem Schülerforschungszentrum, durchgeführt wurden, veröffentlicht. Die Arbeiten können auf Deutsch oder Englisch geschrieben sein.

Wer kann einreichen?

SchülerInnen, AbiturientInnen und Studierende ohne Abschluss, die nicht älter als 23 Jahre sind.

Was musst Du beim Einreichen beachten?

Lies die [Richtlinien für Beiträge](#). Sie enthalten Hinweise, wie Deine Arbeit aufgebaut sein soll, wie lang sie sein darf, wie die Bilder einzureichen sind und welche weiteren Informationen wir benötigen. Solltest Du Fragen haben, dann wende Dich gern schon vor dem Einreichen an die Chefredakteurin Sabine Walter.

Lade die [Erstveröffentlichungserklärung](#) herunter, drucke und fülle sie aus und unterschreibe sie.

Dann sende Deine Arbeit und die Erstveröffentlichungserklärung per Post an:

Chefredaktion Junge Wissenschaft

Dr.-Ing. Sabine Walter
Paul-Ducros-Straße 7
30952 Ronnenberg
Tel: 05109 / 561508
Mail: sabine.walter@verlag-jungewissenschaft.de

Wie geht es nach dem Einreichen weiter?

Die Chefredakteurin sucht einen geeigneten Fachgutachter, der die inhaltliche Richtigkeit der eingereichten Arbeit überprüft und eine Empfehlung ausspricht, ob sie veröffentlicht werden kann (Peer-Review-Verfahren). Das Gutachten wird den Euch, den AutorInnen zugeschickt und Du erhältst gegebenenfalls die Möglichkeit, Hinweise des Fachgutachters einzuarbeiten.

Die Erfahrung zeigt, dass Arbeiten, die z. B. im Rahmen eines Wettbewerbs wie **Jugend forscht** die Endrunde erreicht haben, die besten Chancen haben, dieses Peer-Review-Verfahren zu bestehen.

Schließlich kommt die Arbeit in die Redaktion, wird für das Layout vorbereitet und als Open-Access-Beitrag veröffentlicht.

Was ist Dein Benefit?

Deine Forschungsarbeit ist nun in einer Gutachterzeitschrift (Peer-Review-Journal) veröffentlicht worden, d. h. Du kannst die Veröffentlichung in Deine wissenschaftliche Literaturliste aufnehmen. Deine Arbeit erhält als Open-Access-Veröffentlichung einen DOI (Data Object Identifier) und kann von entsprechenden Suchmaschinen (z. B. BASE) gefunden werden.

Die Junge Wissenschaft wird zusätzlich in wissenschaftlichen Datenbanken gelistet, d. h. Deine Arbeit kann von Experten gefunden und sogar zitiert werden. Die Junge Wissenschaft wird Dich durch den Gesamtprozess des Erstellens einer wissenschaftlichen Arbeit begleiten – als gute Vorbereitung auf das, was Du im Studium benötigst.



Richtlinien für Beiträge

Für die meisten Autor/Inn/en ist dies die erste wissenschaftliche Veröffentlichung. Die Einhaltung der folgenden Richtlinien hilft allen – den Autor/innen/en und dem Redaktionsteam

Die Junge Wissenschaft veröffentlicht Originalbeiträge junger AutorInnen bis zum Alter von 23 Jahren.

- Die Beiträge können auf Deutsch oder Englisch verfasst sein und sollten nicht länger als 15 Seiten mit je 35 Zeilen sein. Hierbei sind Bilder, Grafiken und Tabellen mitgezählt. Anhänge werden nicht veröffentlicht. Deckblatt und Inhaltsverzeichnis zählen nicht mit.
- Formulieren Sie eine eingängige Überschrift, um bei der Leserschaft Interesse für Ihre Arbeit zu wecken, sowie eine wissenschaftliche Überschrift.
- Formulieren Sie eine kurze, leicht verständliche Zusammenfassung (maximal 400 Zeichen).
- Die Beiträge sollen in der üblichen Form gegliedert sein, d. h. Einleitung, Erläuterungen zur Durchführung der Arbeit sowie evtl. Überwindung von Schwierigkeiten, Ergebnisse, Schlussfolgerungen, Diskussion, Liste der zitierten Literatur. In der Einleitung sollte die Idee zu der Arbeit beschrieben und die Aufgabenstellung definiert werden. Außerdem sollte sie eine kurze Darstellung schon bekannter, ähnlicher Lösungsversuche enthalten (Stand der Literatur). Am Schluss des Beitrages kann ein Dank an Förderer der Arbeit, z. B. Lehrer und Sponsoren, mit vollständigem Namen angefügt werden. Für die Leser kann ein Glossar mit den wichtigsten Fachausdrücken hilfreich sein.
- Bitte reichen Sie alle Bilder, Grafiken und Tabellen nummeriert und zusätzlich als eigene Dateien ein. Bitte geben Sie bei nicht selbst erstellten Bildern, Tabellen, Zeichnungen, Grafiken etc. die genauen und korrekten Quellenangaben an (siehe auch [Erstveröffentlichungserklärung](#)). Senden Sie Ihre Bilder als Originaldateien oder mit einer Auflösung von mindestens 300 dpi bei einer Größe von 10 · 15 cm! Bei Grafiken, die mit Excel erstellt wurden, reichen Sie bitte ebenfalls die Originaldatei mit ein.
- Vermeiden Sie aufwendige und lange Zahlentabellen.
- Formelzeichen nach DIN, ggf. IUPAC oder IUPAP verwenden. Gleichungen sind stets als Größengleichungen zu schreiben.
- Die Literaturliste steht am Ende der Arbeit. Alle Stellen erhalten eine Nummer und werden in eckigen Klammern zitiert (Beispiel: Wie in [12] dargestellt ...). Fußnoten sieht das Layout nicht vor.
- Reichen Sie Ihren Beitrag sowohl in ausgedruckter Form als auch als PDF

ein. Für die weitere Bearbeitung und die Umsetzung in das Layout der Jungen Wissenschaft ist ein Word-Dokument mit möglichst wenig Formatierung erforderlich. (Sollte dies Schwierigkeiten bereiten, setzen Sie sich bitte mit uns in Verbindung, damit wir gemeinsam eine Lösung finden können.)

- Senden Sie mit dem Beitrag die [Erstveröffentlichungserklärung](#) ein. Diese beinhaltet im Wesentlichen, dass der Beitrag von dem/der angegebenen AutorIn stammt, keine Rechte Dritter verletzt werden und noch nicht an anderer Stelle veröffentlicht wurde (außer im Zusammenhang mit **Jugend forscht** oder einem vergleichbaren Wettbewerb). Ebenfalls ist zu versichern, dass alle von Ihnen verwendeten Bilder, Tabellen, Zeichnungen, Grafiken etc. von Ihnen veröffentlicht werden dürfen, also keine Rechte Dritter durch die Verwendung und Veröffentlichung verletzt werden. Entsprechendes [Formular](#) ist von der Homepage www.junge-wissenschaft.ptb.de herunterzuladen, auszudrucken, auszufüllen und dem gedruckten Beitrag unterschrieben beizulegen.
- Schließlich sind die genauen Anschriften der AutorInnen mit Telefonnummer und E-Mail-Adresse sowie Geburtsdaten und Fotografien (Auflösung 300 dpi bei einer Bildgröße von mindestens 10 · 15 cm) erforderlich.
- Neulingen im Publizieren werden als Vorbilder andere Publikationen, z. B. hier in der Jungen Wissenschaft, empfohlen.



Impressum

[JUNGE]
wissenschaft



Junge Wissenschaft

c/o Physikalisch-Technische
Bundesanstalt (PTB)
www.junge-wissenschaft.ptb.de

Redaktion

Dr. Sabine Walter, Chefredaktion
Junge Wissenschaft
Paul-Ducros-Str. 7
30952 Ronnenberg
E-Mail: sabine.walter@verlag-jungewissenschaft.de
Tel.: 05109 / 561 508

Verlag

Dr. Dr. Jens Simon,
Pressesprecher der PTB
Bundesallee 100
38116 Braunschweig
E-Mail: jens.simon@ptb.de
Tel.: 0531 / 592 3006
(Sekretariat der PTB-Pressestelle)

Design & Satz

Sebastian Baumeister
STILSICHER – Grafik & Werbung
E-Mail: baumeister@stilsicher.design
Tel.: 05142 / 98 77 89

